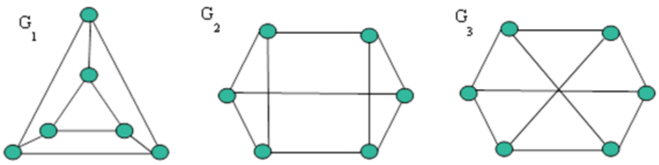
MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

PRIMER PARCIAL (SOLUCIONES)

Ejercicio 1 (6 puntos)

A) Decide razonadamente si los grafos G_1, G_2, G_3 definidos por las siguientes figuras son isomorfos.



Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

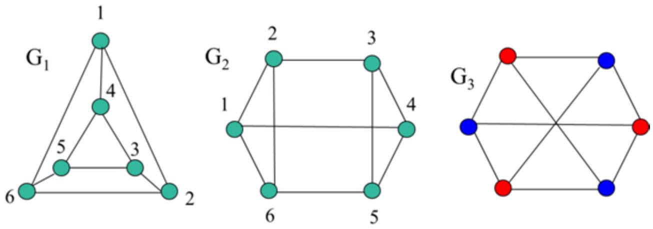
B) En un grafo simple G = (V, A) no conexo que tiene exactamente dos vértices impares, ambos vértices deben pertenecer a la misma componente conexa.

C) Si T es un árbol con raíz 6–ario con 250 vértices entonces la altura de T es mayor o igual que 4.

D) Si un árbol T no tiene vértices de grado superior a 5, tiene 50 hojas y el mismo número k de vértices de los grados 2, 3, 4 y 5, entonces el número n de vértices de T es n = 80.

Solución

A) G_1 y G_2 son isomorfos y no son bipartidos. $G_3 = K_{3,3}$ es bipartido, no es isomorfo a G_1 ni G_2



B) Si G tiene exactamente dos vértices impares, ambos vértices están unidos por un camino. En cada componente conexa de G se verifica la fórmula de Euler $2q = \sum_{v\in V} d(v)$, luego el nº de vértices de grado impar, es una cantidad par.

C) Una cota inferior para la altura de T es 3, ya que $n \le \frac{m^{h+1}-1}{m-1} \Longrightarrow 1251 \le 6^{h+1} \Longrightarrow h \ge 3$

D)

$$q = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v) = \frac{1}{2}[50 + k(2+3+4+5)] = 25 + 7k$$

$$q = n - 1 = 50 + 4k - 1 = 49 + 4k$$

$$k = 8, n = 82$$

Ejercicio 2 (7 puntos)

A) Define radio y diámetro de un grafo.

Demuestra que en todo grafo G se cumple que diam(G) $\le$ 2 rad(G).

Dibuja un grafo de cinco vértices cuyo radio sea igual a su diámetro. ¿Cuál es su centro?

B) Demuestra que si G = (V, A) es un grafo simple de n vértices y para cualquier par de vértices u, v no adyacentes se cumple que $n - 1 \le d(u) + d(v)$, entonces G es conexo y de diámetro 2.

C) ¿Cuántos árboles generadores distintos tiene el grafo completo etiquetado de n vértices?

MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

PRIMER PARCIAL (SOLUCIONES)

El código de Prüfer de un árbol T es C = [2, 3, 6, 1, 4, 2, 2, 5], ¿cuáles son los vértices y las aristas de T?

¿Cómo se puede hallar la sucesión de grados de T, a partir del código de Prüfer?

Solución

B) Si G no es conexo, supongamos que $G = G_1 \cup G_2$, card V_1 = r, card V_2 = s y sean $u \in V_1$, $v \in V_2$.

Se tiene que $d(u) \leq r-1,\ d(v) \leq s-1 \Rightarrow n-1 \leq d(u)+d(v) \leq r+s-2 = n-2 \Rightarrow absurdo$

Luego, G es conexo y existe $w \in V$ tal que w es adyacente a u y a v, $\forall$ u, v $\in$ V $\Longrightarrow diam(G) = 2$.

C) El grafo completo etiquetado de n vértices tiene n^{n-2} árboles generadores distintos.

V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = [2-7, 3-8, 6-3, 1-6, 4-1, 2-4, 2-9, 5-2, 5-10]

Ejercicio 3 (4 ptos.)

Aplica el algoritmo de búsqueda en profundidad, indicando el doble etiquetado de cada vértice, al grafo G = (V, A), V = {a, b, c, d, e, f, g, h} definido por la matriz de adyacencia siguiente:

$$M_a(G) = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detecta los vértices-corte y las aristas puente de G a partir del doble etiquetado de los vértices, indicando la condición sobre las etiquetas que los caracteriza.

Nota: La búsqueda en profundidad debe empezar en el vértice **e** y los vértices se eligen siguiendo el orden alfabético.

Solución

Vértices	Etiquetas de los vértices	Aristas de retroceso
e	[1, 1]	
b	[2, 2]	
a	[3, 2]	
c	[4, 2]	cb
d	[5, 3]	da
f	[6, 1]	
g	[7, 1]	ge
h	[8, 8]	

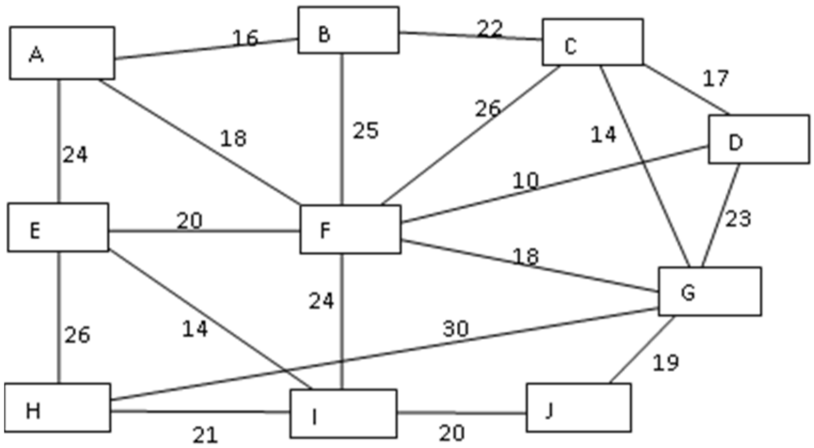
MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

PRIMER PARCIAL (SOLUCIONES)

Los vértices-corte son b, f y e.
El vértice raíz e es corte porque tiene dos hijos.
La condición en las etiquetas para que un vértice (no raíz) u sea corte es que exista un hijo v de u tal que df (u) $\leq$ low (v)
Una arista uv con df(u) < df(v) es puente si df(u) < low(v). En el grafo H las aristas que cumplen esta condición son be y fh.

Ejercicio 4 (4 ptos.)

El peso de cada arista en un grafo ponderado indica el peligro de atravesarla (cuanto mayor sea el peso mayor será el peligro). Queremos construir los caminos más seguros entre cada par de vértices. Describe un algoritmo que construya el árbol generador que contiene a todos esos caminos.
Aplícalo al grafo de la siguiente figura, dando sus estructuras:

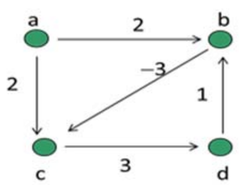


Solución

El algoritmo que se debe aplicar es el de Kruskal o el de Prim.
Árbol generador de peso mínimo A_T = [FD, CG, EI, AB, CD, AF, GJ, EF, HI]

Ejercicio 5 (4 ptos.)

En la ciudad G se ha diseñado un recorrido turístico que conecta los 4 lugares de mayor importancia de la capital: {a, b, c, d}, desplazándose con un vehículo eléctrico capaz de recargar sus baterías aprovechando frenadas y cuestas abajo. El grafo que representa la cantidad de energía utilizada por el vehículo para recorrer cada uno de los trayectos es el representado en la figura adjunta:



A) Halla, utilizando el algoritmo correspondiente, el camino con mínimo consumo de energía para desplazarse desde el lugar **a** hasta cualquier otro lugar.
B) Describe brevemente el algoritmo utilizado, incluyendo la idea clave del algoritmo y la descripción del paso general.

MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

PRIMER PARCIAL (SOLUCIONES)

Solución

El algoritmo que se debe aplicar es el de Bellman-Ford, ya que proporciona el camino mínimo entre dos vértices y las aristas tienen pesos negativos.

Inicialización: Sean $T = \{s\}$ $L(s) = d(s, s) = 0$, $L(v) = w(s\,v)$ para $v \neq s$

Iteración: Repetir $n-1$ veces lo siguiente:

$\forall$ arco $e = u\,v$ actualizar la etiqueta $L(v) := min\{L(v),\ L(u) + w(u\,v)\}$

1ª	*a*	*b*	*c*	*d*
	0	∞	∞	∞
ab	0	2	∞	∞
ac	0	2	2	∞
bc	0	2	–1	∞
cd	0	2	–1	2
db	0	2	–1	2

2ª	*a*	*b*	*c*	*d*
	0	2	–1	2
ab	0	2	–1	2
ac	0	2	–1	2
bc	0	2	–1	2
cd	0	2	–1	2
db	0	2	–1	2